力学量期待値の時間発展と古典軌道アンサンブル(カオスとその周辺,研究会報告)

高橋, 公也; 首藤, 啓

力学量期待値の時間発展と古典軌道アンサンブル

九工大　情報工　高橋公也
早大　　理工　　首藤　啓

分布関数を用いた量子古典対応では，比較的短いタイムスケールで量子古典対応は崩れる．このタイムスケールは，トーラス領域で O（$\sqrt{\hbar}$），カオス領域で log $\hbar^{-1}$である．従来このタイムスケールを越えると量子効果の為に，素朴な意味の量子古典対応はないと考えられてきた．ところが，量子系における力学量期待値の時間発展を調べるとこれらのタイムスケールを越える非常に長い時間，トーラス領域では規則的な変化をし，一方カオス領域では非常に”不規則な変化”をしている様に見える．もちろんカオス領域と言えども量子系は真のカオスの持つ不安定性を与える事はない．束縛状態ではこのような”不規則な変化”は，力学量期待値のパワースペクトルの離散性が露になる時間（O（$\hbar^{-2}$））までの現象である．しかし，このタイムスケールは $\hbar \ll 1$ の場合非常に長く，これより短いタイムスケールで見ている限りはこの”不規則な変化”がカオス的なものであるのか，準周期的なものであるのかを判断するのはほとんど困難である．この様な”不規則な変化”は古典力学の性質をはたして反映しているのであろうか？伏見表示の分布関数の時間発展を記述する方程式は古典的なLiouville 方程式の項と量子効果の項の２つの部分に分けられる．$\hbar$ が十分に小さいときにはLiouville 方程式の項が支配的となり，マクロな目で見れば伏見関数は古典的な相空間の流れに沿って動いている様に見える．従って，力学量期待値の”不規則な変化”の中に古典カオスのある種の性質が反映されていると考えられる．この様な量として，例えば，力学量期待値のゆらぎの大きさや，パワースペクトルの概形やその強度などが考えられる．これらの量は系の大域的な運動を特徴付ける”統計量”である．そこで，我々はこれらの量に注目し，力学量期待値の”不規則な変化”をあたかも古典力学のカオスを内在するあるシステムから生じたものと見なしたときに，その古典的な対応物であるシステムはどの様な物になるかという問題を考えた．（注意として，ここで，我々は力学量期待値の”不規則な変化”を正確に模倣するような古典的な対応物は考えていない）．この様な古典的な対応物として我々は古典軌道アンサンブルを見いだした．

以下に，その構成の仕方を述べる．簡単の為に１自由度で考える．ハミルトニアンＨのエネルギー固有値を E_n，固有関数を u_n とすると，波動関数の時間発展は

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n \exp(-iE_n t/\hbar)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1 \qquad \text{規格化条件}$$

となる．これに対し重み付いた古典軌道の集合 $\{q_n(t), p_n(t), |c_n|^2\}$ を考えこれを古典軌道アンサンブルと名付ける．ここで各 $(q_n(t), p_n(t))$ はエネルギー曲面 $H(q_n(t), p_n(t)) = E_n$ 上の古典軌道でありその初期点はこの曲面上の任意の点であ

る．$|c_n|^2$は各軌道にかかる重みであり，力学量A(q,p)の期待値は

$$\langle A(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \; A(q_n(t),p_n(t))$$

と定義される．古典軌道アンサンブルは，可積分系の力学量期待値のパワースペクトルの解析をもとにして得られたものであり，非可積分系にはその自然な拡張を用いる．可積分系では，古典軌道アンサンブルはパワースペクトルのピーク１つ１つを再現するように作られている為に，統計量だけでなく力学量期待値の時間発展そのものを近似することができる．

古典軌道アンサンブルの是非を確かめる為に我々は簡単な系による数値計算を行った．

$$H=\frac{1}{2}p^2+\frac{a_1}{2}q^2+\frac{a_2}{4}(1+a_3 \sin \omega t)\,q^4 \qquad \hbar=0.08$$

$a_1=1.0$, $a_2=1.0$, $a_3=0.25$, $\omega=0.7$に選ぶと相空間はトーラスで埋まる．このときの初期状態として$\langle q\rangle=1.5$, $\langle p\rangle=0$ の極小波束を選ぶ．$a_1=-1.0$, $a_2=0.25$, $a_3=0.4$, $\omega=0.7$ に選ぶと相空間には大きなカオス領域ができる．初期状態として$\langle q\rangle=1.0$, $\langle p\rangle=0$ の極小波束を選ぶ．

図１(a),(b)は，トーラス領域における量子系と古典軌道アンサンブルの力学量期待値$\langle q\rangle$のパワースペクトルである．古典軌道アンサンブルが量子系のパワースペクトルを忠実に再現しているのがわかる．図には示さないが力学量期待値の時間発展そのものも非常によい一致を示す．

図２(a),(b)は，カオス領域における量子系と古典軌道アンサンブルの力学量期待値$\langle q\rangle$のパワースペクトルである．多少の違いは見られるがスペクトルの概形及びその強度においてよい一致が見られる．図３(a),(b)は，量子系と古典軌道アンサンブルにおける力学量期待値$\langle q\rangle$の値分布である．図４(a),(b)は，それぞれ対応する力学量の分散$(\Delta q)^2$ の値分布である．$\langle q\rangle$の値分布はかなりよい一致を示すのに対して$(\Delta q)^2$ はあまりよい一致を示さない．これは，量子波束の局在化によるもので，局在化の仕方は初期状態に依存する．局在化は量子系特有ではあるがｓｃａｒの存在などから説明されるごく一般的な現象である．その為に，古典軌道アンサンブルは量子系の力学量期待値の時間発展に対しある程度の近似を与えるがその近似の良し悪しは初期状態に依存することになる．どの様な初期状態に対して古典軌道アンサンブルは最も良い近似を与えるのであろうか？ここでは，詳しい議論をする余裕はないが，それは重み$|c_n|^2$をエネルギーの関数として見たときその概形がスムーズな関数となる場合である．そのような例としては，エネルギーの偏差が$\Delta E > \sqrt{\hbar}$となる様なミクロカノニカル分布やカノニカル分布があげられる．この事は，古典軌道アンサンブルが単に仮想的な物ではなく物理的に意味のある物であると言う事を示しているのだろうか？我々は，それに対する明確な答えを持ってはいないが，以下に示すように統計力学のアンサンブルと古典軌道アンサンブルの間の関係

について議論することはできる.

重み$|c_n|^2$がカノニカル分布になっていて，系が強いエルゴード性を持つ場合を考える. $\hbar\to 0$の極限で力学量期待値のゆらぎは0になり，$\langle A\rangle=\mathrm{const}$となる. これを量子系で考えれば純粋状態の密度行列の非対角項の位相がでたらめにになり力学量期待値の計算においてそれらが互いに打ち消す合う為に混合状態の密度行列で計算した結果と同じになるためと考えられる. これを古典軌道アンサンブルを用いて考えると以下のようになる. $\hbar\to 0$の極限で，ある一定エネルギー巾にあるエネルギーレベルの数は無限に多くなる. この時古典軌道アンサンブルの点は系のエルゴード性の為に相空間上でマクロな目で見ればほぼ一様になる. そこでトーマスーフェルミの近似を用いると統計力学への移行が起こる.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \, A(q_n(t), p_n(t)) \quad \to \quad h^{-N} \int \rho_c(E)\, A(q,p)\, dqdp$$

ここで，$\rho_c(E)$はカノニカル分布であり，Nは系の自由度である.

今の議論を逆にたどってみよう. 統計力学では分布関数$\rho_c(E(q,p))$をh^Nで割ることにより微小体積h^Nが1つの状態に対応している事を示している. そこで各体積h^Nの中に1つの代表点(q_n, p_n)があると考えれば上の積分は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_c(E(q_n, p_n))\, A(q_n, p_n)$$

と近似できる. これは点(q_n, p_n)に重み$\rho_c(E(q_n, p_n))$がついた静止した点のアンサンブルと考える事が出来る. $\hbar$が大きくなると量子効果によりゆらぎが起き，力学量の期待値が時間的にゆらぎ始める. この量子効果によるゆらぎは静止していた点のアンサンブルが時間的にゆらぎ始めたと考える事が出来る. これまでの議論によりこの点のアンサンブルは単にゆらいでいるのではなく，古典軌道の上を動き回っていると考えられる. 我々が古典軌道アンサンブルと名付けた理由はここにある. 量子カオスによる統計力学の基礎づけは重要な問題であるが，種々の未解決の問題を含んでいる. 我々の提案する古典軌道アンサンブルはこれらの問題の解決に重要な役割を果たすと考えている.

最後に，ミクロな世界を支配する量子力学には真の意味のカオスは存在しない. しかしながらマクロな古典的な世界は十分にカオス的である. 我々は有限の精度と時間の中で物を観測しそれをもとに方程式をたてる. これらの方程式は真の意味のカオスを含み，マクロな現象を的確にとらえている. 近年のカオス研究は我々が現実の現象を観測するときにその現象がカオスであると考える事により現象の本質を的確にとらえることが出来ることを示している. 観測データが有限の精度と時間の範囲に限られしかも背後にある量子力学には真の意味のカオスがないのにもかかわらず. これは，我々がいかにカオスを認識するのかと言う問題であり，カオスの観測の問題である. 我々は，現在の試みをこの様な方向と結び付けようと思っている.

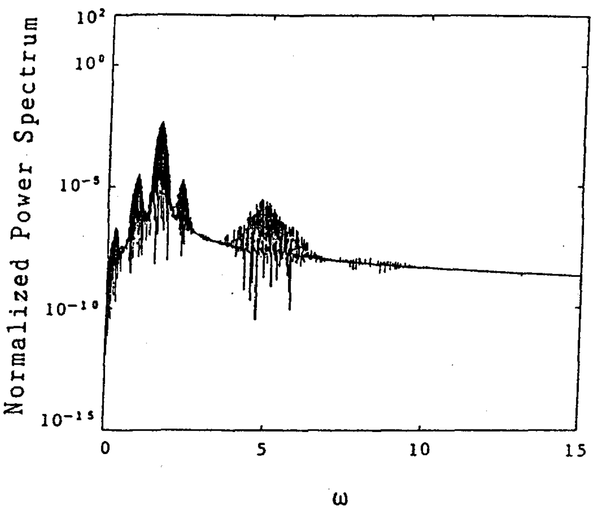

図 1 (a)

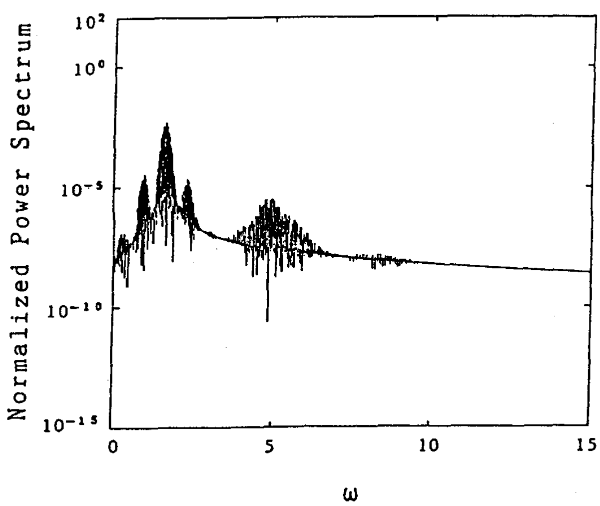

図 1 (b)

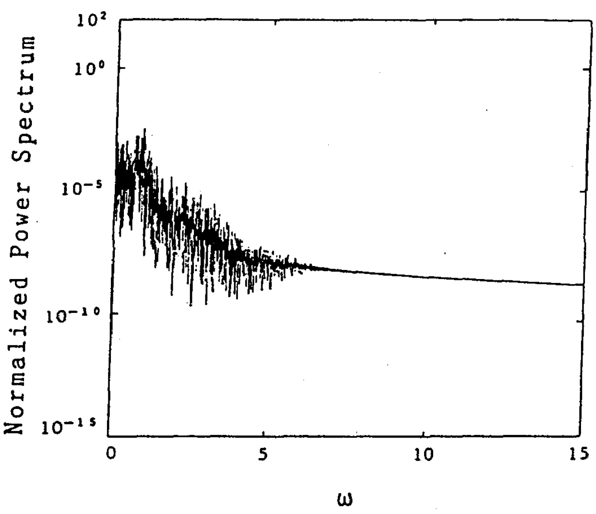

図 2 (a)

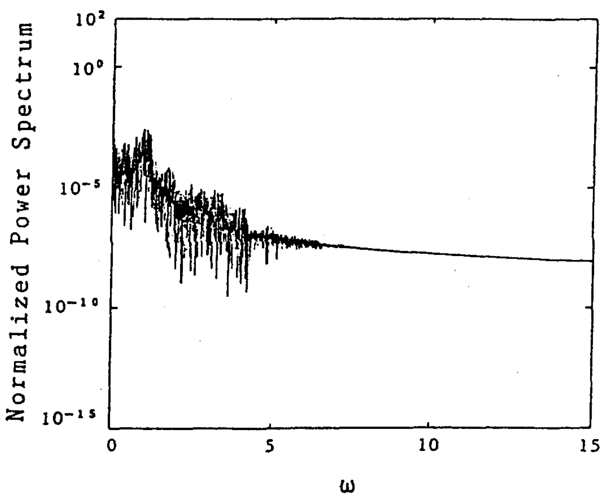

図 2 (b)

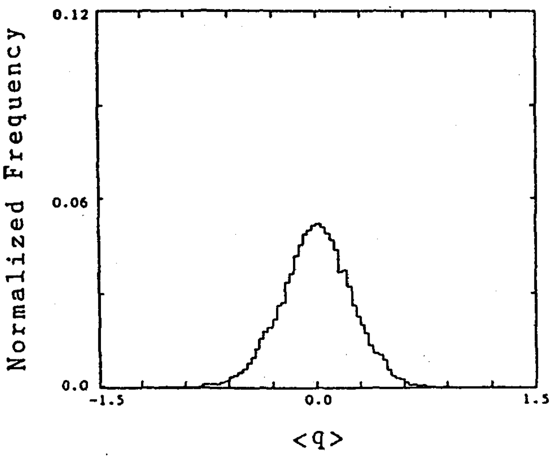

図 3 (a)

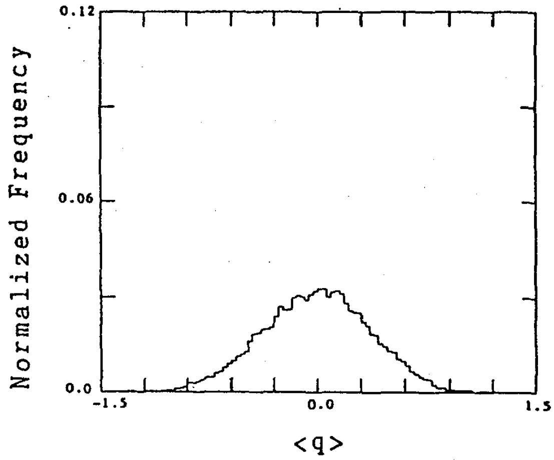

図 3 (b)

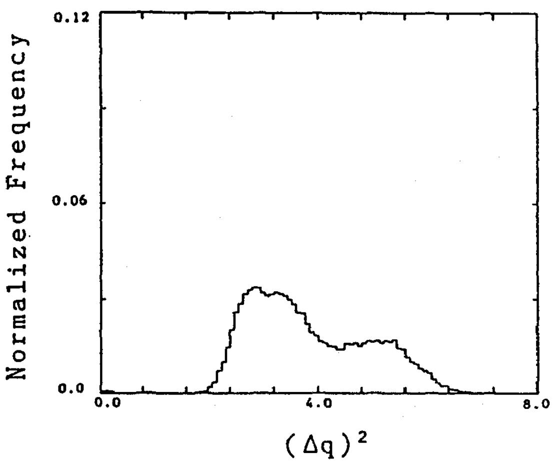

図 4 (a)

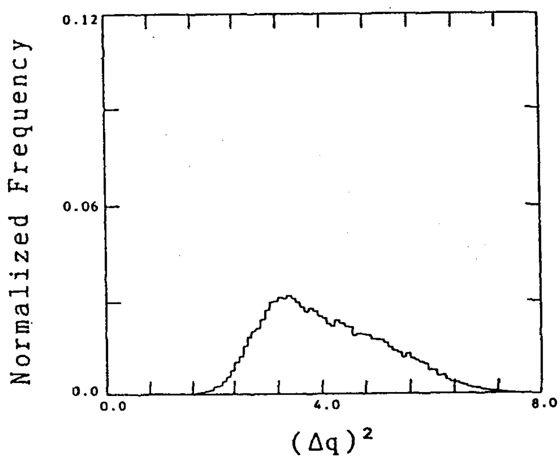

図 4 (b)